数理解析研究所講究録
718巻 1990年 235-246

不変超函数のみたす微分方程式系について

立教大·理　落合　啓之（Hiroyuki Ochiai）

§

Vを$\mathbb{R}$上の有限次元線型空間、Hを$GL(V)$の連結閉部分群とする。V上の超函数$u(x)$が<u>H-不変</u>であるとは、

$$u(hx) = u(x) \qquad (\forall h \in H)$$

のときをいう。V上のH-不変な超函数全体を$\mathcal{B}^H(V)$と書く。

$H_1 < H_2 < GL(V)$を2つの連結閉部分群とすると、一般に

$$\mathcal{B}^{H_2}(V) \subset \mathcal{B}^{H_1}(V)$$

が、成りたつ。

<u>問</u>　いつ　$\mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)$　が、成りたつか。

<u>例</u>　$V = \mathbb{R}^{2n}$

$$H_2 = SO_0(n,n) = \left\{ h \in GL(V) \;;\; {}^t h \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} \right\}_0$$

$$H_1 \cong GL^+(n,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \in GL(V) \;;\; g \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det g > 0 \right\}.$$

但し $\{\quad\}_0$ は単位元連結成分。

上の問は、H_1とH_2が、不変超函数のレベルで近いかどうかを聞いていることになる。上の例の場合は、$n=1$のときは、

$H_1 = H_2$ なので、問は自明に成立するが、$n \geq 2$ のときは、

$\dim H_1 = n^2 \lneqq 2n^2 - n = \dim H_2$ なので、$H_1 \subsetneqq H_2$ である。

ここでは、この問題を微分方程式系の言葉で書いて、その定式化でわかることを記す。また、後半では、いくつかの例を記すことにする。

§

まず、記号の準備から。

H の Lie 環を $\mathfrak{h}$ と書く。$Y \in \mathfrak{h}$ に対し、V 上のベクトル場 L_Y を

$$(L_Y f)(v) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tY)v)\Big|_{t=0} \qquad (\forall v \in V, \forall f \in C^\infty(V))$$

で定義する。このとき、

$$u \in \mathcal{B}^H(V) \iff L_Y u = 0 \qquad \forall Y \in \mathfrak{h}$$

が成りたつ。V 上の(線型偏)微分作用素の成す環の層を $\mathcal{D}$、その大域切断を $D = \Gamma(V, \mathcal{D})$ と書く。(代数的カテゴリーで考える)。D は階数が $\dim V$ の Weyl 代数になる。L_Y は自然に D の元と思えるのでそう思うことにする。さて $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対して

$$M = D \Big/ \sum_{Y \in \mathfrak{h}} D L_Y$$

と定義し、この左 D 加群 M を H-不変を定義する微分方程式系と(仮に)いうことにする。このとき、名前の通り、

$$\mathcal{B}^H(V) = \mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{B}(V))$$

が成りたつ。

２つの閉部分群 $H_1 < H_2 < GL(V)$ に対しては、Lie 環 $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ を経由して、やはり左 D 加群 M_1, M_2 を得る。一般に $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ から、全射準同型 $M_1 \longrightarrow M_2$ を得るが、

<u>問</u>　いつ $M_1 = M_2$ が成りたつか。

ということが考えられる。実際、$M_1 = M_2$ が成りたてば、$\mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)$ が成りたつ。さて、

$$
\begin{aligned}
& M_1 = M_2 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{Y \in \mathfrak{h}_1} D L_Y = \sum_{Y \in \mathfrak{h}_2} D L_Y \\
\Leftrightarrow\ & L_{Y'} \in \sum_{Y \in \mathfrak{h}_1} D L_Y \qquad {}^\forall Y' \in \mathfrak{h}_2
\end{aligned}
$$

であるから

$$[\mathfrak{h}] := \left\{ Y' \in \mathfrak{gl}(V) \ ; \ L_{Y'} \in \sum_{Y \in \mathfrak{h}} D L_Y \right\}$$

と定義すると、

$$M_1 = M_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{h}_2 < [\mathfrak{h}_1]$$

がわかる。(この定義と下の補題の一部は、小林俊行氏による)

<u>補題</u>（ $[\cdot]$ の性質）

(0)　$\mathfrak{h} < [\mathfrak{h}]$ であって、$[\mathfrak{h}]$ は Lie 環。

(1)（単調性）　$\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$ ならば、$[\mathfrak{h}_1] < [\mathfrak{h}_2]$

(2)（安定性）　$[[\mathfrak{h}]] = [\mathfrak{h}]$

(3)（交わり）　$\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{h}_1]$, $\mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{h}_2]$ ならば、$[\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2] = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$

(4)　$V_{\mathbb{C}}$ を V の複素化とし、$\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$ の複素部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ について上と同様に定義したものを $[\mathfrak{h}]_{\mathbb{C}}$ と書く。このとき、

$$[\mathfrak{f}\otimes\mathbb{C}]_{\mathbb{C}} = [\mathfrak{f}]\otimes\mathbb{C} .$$

(5) $V = V_1 \oplus V_2$ とする。$[\cdot]$ が $\mathfrak{gl}(V)$ に対し定義されているのを明記するときは $[\cdot]_V$ と書くことにする。このとき、$\mathfrak{f}_1 \subset \mathfrak{sl}(V_1)$，$\mathfrak{f}_2 \subset \mathfrak{sl}(V_2)$ ならば、

$$[\mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{f}_2]_V = [\mathfrak{f}_1]_{V_1} \oplus [\mathfrak{f}_2]_{V_2}$$

(6) $\theta(Y) = -{}^tY \quad (Y \in \mathfrak{gl}(V))$ とし、$\theta\mathfrak{f} = \{\theta(Y) ; Y\in\mathfrak{f}\}$ とおく。このとき、$\mathfrak{f}\subset\mathfrak{sl}(V)$，$\theta\mathfrak{f}=\mathfrak{f}$ ならば $\theta[\mathfrak{f}] = [\mathfrak{f}]$．

(7) $[\mathfrak{f}] = \cap\{\mathfrak{f}' ; \mathfrak{f}$ を含む $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間で、$\mathfrak{f}'=[\mathfrak{f}']\}$.

(8) V の開集合 Ω 上の超函数 u に対して、$\mathrm{Ann}(u)$ を

$$\mathrm{Ann}(u) := \{ Y\in\mathfrak{gl}(V) ; L_Y u = 0\}$$

と定義すると、$[\mathrm{Ann}(u)] = \mathrm{Ann}(u)$ 。

注　(5), (6) で、$\mathfrak{sl}(V)$ に入るという仮定をはずすと、一般には不成立。また (8) のように表わせる $\mathfrak{f}=\mathrm{Ann}(u)$ を、(仮に) 函数による特徴付けをもつという。

(2) の証明　$L : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow D$ を展開環 $U(\mathfrak{gl}(V))$ に延ばして、代数準同型 $L : U(\mathfrak{gl}(V)) \longrightarrow D$ を得る。L は単射ではないが、$\mathfrak{gl}(V)$ は単射に入っているので、$\mathfrak{gl}(V)$ を D の部分空間と思うことにすると、$[\mathfrak{f}]$ はその定義から、

$[\mathfrak{f}] = ($ $\mathfrak{f}$ で生成される D の左イデアル $\sum_{Y\in\mathfrak{f}} DL_Y$ の $\mathfrak{gl}(V)$ での切り口$)$ と思える。このことから (2) $[[\mathfrak{f}]] = [\mathfrak{f}]$ が出る //

冒頭の例の場合は、 $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{so}(n,n)$.

◎ $\begin{cases} n \geqq 3 & \text{ならば } [\mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_2 \quad (\text{ゆえに特に } \mathcal{B}^{H_2}(V) = \mathcal{B}^{H_1}(V)) \\ n=2 & \text{のときは } [\mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1 \end{cases}$

である。

∵ V の座標を $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ ととると、 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ の L による像はそれぞれ

$\mathfrak{g}_1$: $x_i \partial x_j - y_j \partial y_i \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$

$\mathfrak{g}_2$: $x_i \partial x_j - y_j \partial y_i$, $x_i \partial y_j - x_j \partial y_i$, $y_i \partial x_j - y_j \partial x_i \quad (1 \leqq i, j \leqq n)$

で生成される。

○ $n \geqq 3$ のとき、 $1 \leqq i, j, k \leqq n$ が相異なるならば、

$$\begin{aligned} x_i \partial y_j - x_j \partial y_i = & (x_j \partial y_k - x_k \partial y_j)(x_i \partial x_k - y_k \partial y_i) \\ & + (x_k \partial y_i - x_i \partial y_k)(x_j \partial x_k - y_k \partial y_j) \\ & + (x_i \partial y_j - x_j \partial y_i)(x_k \partial x_k - y_k \partial y_k) \end{aligned}$$

であるから、 $[\mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_2$ がわかる。逆に $\omega = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ とすると、 $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{so}(\omega) = \mathrm{Ann}(\omega)$ だから (8) より $[\mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_2$.

合わせて $[\mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_2$ 。

○ $n = 2$ のとき.

実は、更に $\mathcal{B}^{H_2}(V) \neq \mathcal{B}^{H_1}(V)$ であるが、ここでは別の(似た)方法を用いる。まず上と同じく $[\mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_2$ は、既知。

さらに (8) で、 $\Omega = \{x_1 \neq 0\}$, $u = \delta(x_1 y_1 + x_2 y_2) Y(x_1 y_2)$ とすると、

$(x_1 \partial y_2 - x_2 \partial y_1) u = \delta(y_1) \delta(y_2) \neq 0$ で

$\mathrm{Ann}\, u = \langle \mathfrak{a}_1,\ y_1\partial x_2 - y_2\partial x_1 \rangle$ となるから(6)と合わせて

$[\mathfrak{a}_1] = \mathfrak{a}_1$ を得る。 //

注 今の例で, V の H_2-, H_1- 軌道分解はそれぞれ,

$$H_2 \begin{cases} \omega^{-1}(t) & ; t \in \mathbb{R}^\times \\ \{0\} & \\ \omega^{-1}(0) - \{0\} & \end{cases}, \qquad H_1 \begin{cases} \omega^{-1}(t) & ; t \in \mathbb{R}^\times \\ \{0\} & \\ \omega^{-1}(0) - \{x=0 \text{ 又は } y=0\} & (*) \\ \{x=0,\ y\neq 0\} & \\ \{x\neq 0,\ y=0\} & \end{cases}$$

(* $n=2$ のときは, この軌道は, さらに2つの連結成分に分かれる)

となっていて、異なる。一般には, 軌道分解が一致することと、$[\mathfrak{a}_1] = [\mathfrak{a}_2]$ となることの間に、包含関係はない。

概均質ベクトル空間 $(GL(1)\times GL(n),\ \square\otimes(\Lambda_1\oplus\Lambda_1^*),\ V(n)\oplus V(n)^*)$ と、$(SO(2n),\ \Lambda_1,\ V(2n))$ は、相対不変式が等しいので、それから定義される $\mathcal{D}$-加群 $\mathfrak{M}_\alpha = \mathcal{D}/\mathcal{D}\mathcal{J}[\alpha]$ は一致する。($\alpha\in\mathbb{C}$)

(但し, $\mathcal{J}[\alpha] = \{P(\alpha)\ ;\ P(s)\in\mathcal{J}\}$, $\mathcal{J} = \left\{P(s)\in\mathcal{D}[s]\ ;\ \begin{matrix} P(s)f(x)^s = 0 \\ s\in\mathbb{C},\ x\in V-S \end{matrix}\right\}$

S は p.v. の特異集合, f は相対不変式)(記号は[SKKO])。

一方, $\mathfrak{M}'_\alpha = \mathcal{D}\Big/\sum_{A\in\mathfrak{g}}\mathcal{D}\left(\langle d\rho(A)x,\ D_x\rangle - \alpha\,\delta\chi(A)\right)$ の方は, $n\geq 3$ ならば一致し, $n=2$ ならば, $\alpha=-2$ の時一致しない, ということを左で言っている。$n\geq 3$ の時も, 両者の $V_{\mathbb{C}}$ の軌道分解は異なり, $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}'_\alpha$ となることは, 一般論からは出ない。

(なお, $n=2$ でも $\alpha\neq -2$ ならば, $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}'_\alpha$ である)

§

他に $[\cdot]$ の計算をしたものを挙げる。

◎ $V=\mathbb{R}^n$ 　 $\mathfrak{f}=\mathfrak{sl}(V)$

このとき、$[\mathfrak{f}]=\mathfrak{f}$ であり、V の原点のデルタ函数 δ によって $\mathfrak{f}=\mathrm{Ann}(\delta)$ と書ける。

◎ $V=\mathbb{R}^n$ 　 $\mathfrak{f}=\mathfrak{so}(p,n-p)$ 　 $(0\leq p\leq n)$

このとき $[\mathfrak{f}]=\mathfrak{f}$ であり、$\mathfrak{f}$ に附随した2次形式 ω を用いて、$\mathfrak{f}=\mathrm{Ann}(\omega)$ と書ける。

◎ $V=\mathbb{R}^{2n}$ 　 $\mathfrak{f}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$

このとき $[\mathfrak{f}]=\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$

∵ V の座標を $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ ととり、$\mathfrak{f}=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & -{}^tA\end{pmatrix};\ \begin{matrix}{}^tB=B\\ {}^tC=C\end{matrix}\right\}$ に対し、p5 の証明と同様に $\begin{pmatrix}0 & 0\\ E_{ji} & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$ を作る。

$$\begin{cases} x_i^2\,\partial x_i = x_i(x_i\,\partial x_i - y_i\,\partial y_i) + y_i\,x_i\,\partial y_i \\ x_i^2\,\partial y_j = x_i(x_i\,\partial y_j + x_j\,\partial y_i) - x_j\,x_i\,\partial y_i \\ x_i\,\partial y_j = \frac{1}{2}(\partial x_i\cdot x_i^2\,\partial y_j - \partial y_j\cdot x_i^2\,\partial x_i) \end{cases}$$

同様に、$y_i\,\partial x_j \leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & E_{ji}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ も作れる。あとは性質(0)より $[\mathfrak{f}]\supset\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$ を得る。一方 $\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$ は $[\cdot]$ で安定なので、$[\mathfrak{f}]=\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$ を得る。 //

◎ $V=\mathbb{R}^{nm}=M(n,m;\mathbb{R})$, $\mathfrak{f}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

$\mathfrak{f}$ の作用は、左からの $SL(n,\mathbb{R})$ のかけざんから来るもの。

このとき $[\mathfrak{f}]=\mathfrak{f}$ 。

この証明のために、

補題　u を V の開集合 Ω 上定義された超函数で、その台の閉包 $C=\overline{\mathrm{supp}(u)}\subset V$ が、代数的集合なるものとする。
このとき、$H_1=\{h\in GL(V)\ ;\ hC=C\}$，$\mathfrak{h}_1$ を H_1 の Lie 環とすると、　$\mathrm{Ann}(u)\subset\mathfrak{h}_1$

証明　$\mathrm{Ann}(u)$ に対応する $GL(V)$ の連結 Lie 部分群を H と書く。
任意の $x\in\mathrm{supp}(u)$ に対して、x の Ω 内の近傍 U と、H の単位元 e の近傍 V を $VU\subset\Omega$ かつ $Vx\subset U$ なるようにとる。
このとき、H の定義から $(h^*u)|_U=u|_U$ （但し $(h^*u)(x)=u(hx)$）が、$\forall h\in V$ に対し成立する。故に $hx\in\mathrm{supp}(u)\subset C$。仮定より $hx\in C$ というのは $h\in H$ に関する代数的関係だから、$\forall h\in H$ に対して、$hx\in C$ を得る。故に $h(\mathrm{supp}(u))\subset C$。
閉包をとって $hC\subset C$。これが $\forall h\in H$ について成りたつから $H\subset H_1$　即ち $\mathrm{Ann}(u)\subset\mathfrak{h}_1$　//

注　$C=\overline{\text{sing}-\mathrm{supp}(u)}$ としてもよい。」

これを用いて、元にもどる。$1\leqq i<j\leqq m$ に対して、u として $\{i$ 列めと j 列めが平行$\}$ という所に台をもつ、V の開集合上の $\mathfrak{g}$-不変な超函数（実は測度）をとる。（存在する）。このとき、

$$\mathfrak{g}\subset[\mathfrak{g}]=[\mathrm{Ann}(u)]=\mathrm{Ann}(u)\subset\mathfrak{h}_1$$

i,j を動かした $\mathfrak{h}_1$ の交わりは $\mathfrak{gl}(n)$ になり、これと $\mathfrak{sl}(V)$ との交わりが $\mathfrak{g}$ なので、$\mathfrak{g}\subset[\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$　即ち $[\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ を得る //

◎ $V = \mathbb{R}^{nm} = M(n, m; \mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

このとき $[\mathfrak{g}] = \begin{cases} \mathfrak{g} & m \geqq n \\ \mathfrak{gl}(V) & m < n \end{cases}$

<u>証明</u> $m \geqq n$ のとき、V の n 次小行列式は、$\mathfrak{g}$-相対不変式である。このとき、次の補題がある。

<u>補題</u> f を V 上の実係数多項式で、次の2つをみたすとする。

1) f は $\mathfrak{g}$-相対不変

2) $\{f=0\}$ 上、消える V 上の多項式は、f で割り切れる。

このとき、$[\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} + \mathrm{Ann}(f)$

<u>証明</u> f が $\mathfrak{g}$-不変のときは $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Ann}(f)$ より ok.

f が $\mathfrak{g}$-不変でないときは、$\mathfrak{g}_1 := \{Y \in \mathfrak{gl}(V) \,;\, L_Y f = c_Y f,\ c_Y \in \mathbb{C}\}$ とおくと、$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} + \mathrm{Ann}(f)$。ゆえに $[\mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$ をいえばよい。

$u(x) = Y(f(x))$ とおくと、$\mathfrak{g}_1 \subset \mathrm{Ann}(u)$。ゆえに、以下 $\mathrm{Ann}(u) \subset \mathfrak{g}_1$ をいえばよい。$\mathrm{Ann}(u)$ に対応する $GL(V)$ の連結 Lie 部分群を H_2 とすると、$^\forall x \in \mathrm{sing\,supp}(u) = \{y \in V \,;\, p(y) = 0\}$ に対し $hx \in \mathrm{sing\,supp}(u)$ $(^\forall h \in H_2)$。即ち、$p(hx) = 0$。

仮定2) より $p(hx)$ は p で割れて、次数をみれば、$p(hx) = c_h\, p(x)$ と、ある $c_h \in \mathbb{C}$ を用いて書けることがわかる。即ち、

$\mathrm{Ann}(u) \subset \mathfrak{g}_1$ //

これを用いると、$m \geqq n$ のとき、$[\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ がわかる。

一方 $m<n$ のときは少々面倒で、局所化して帰納法を用いる。

<u>補題</u>　$V = M(n, m; \mathbb{R})$，$(n>m)$ とする。D の左イデアル I_λ を

$$I_\lambda = \sum_{1\leq i,j\leq n} D\left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik}\partial_{jk} + \lambda\delta_{ij}\right), \qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

と定義する。このとき、

(1)　$\lambda\notin\{0,1,\cdots,m\}$　ならば、$I_\lambda = D$

(2)　$\lambda = 0$　ならば、$I_\lambda = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} D\,\partial_{ij}$

(3)　$\lambda = m$　ならば、$I_\lambda = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} D\,x_{ij}$

<u>証明</u>　m に関する帰納法

∘ $m=1$ のとき、

$$\begin{cases} \partial_i\cdot x_i\partial_j - \partial_j(x_i\partial_i+\lambda) = (1-\lambda)\,\partial_j & (i\neq j)\\ x_j(x_i\partial_i+\lambda) - x_i\cdot x_j\partial_i = \lambda\,x_j & \\ \partial_j\,x_j - x_j\,\partial_j = 1 & \end{cases}$$

より　ok

∘ $m\geq 2$ とする。左 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{D}\otimes_D D/I_\lambda = \mathcal{D}/\mathcal{D}I_\lambda$ を扱う。まず開集合 $\{x_{11}\neq 0\}$ で考えることとし、そこで次のような新しい座標系をとる。

$$\begin{cases} \tilde{x}_{11} = x_{11} & \\ \tilde{x}_{i1} = x_{i1}/x_{11} & 2\leq i\leq n\\ \tilde{x}_{1j} = x_{1j}/x_{11} & 2\leq j\leq m\\ \tilde{x}_{ij} = x_{ij} - x_{i1}x_{1j}/x_{11} & 2\leq i\leq n,\ 2\leq j\leq m \end{cases}$$

この座標で I_λ の生成元を書くと、

$$\mathcal{D} I_\lambda \big|_{\{x_{11} \neq 0\}} \supset \sum_{i=2}^{n} \mathcal{D} \partial \tilde{x}_{i1} + \sum_{2 \leq i, j \leq n} \mathcal{D} \left(\sum_{k=2}^{m} \tilde{x}_{ik} \partial \tilde{x}_{jk} + \lambda \delta_{ij} \right).$$

帰納法の仮定より $\lambda \notin \{0, 1, \cdots, m-1\}$ ならば、$\mathcal{D} I_\lambda \big|_{\{x_{11} \neq 0\}} = \mathcal{D}$

即ち $\mathrm{supp}\, \mathcal{M}_\lambda \subset \{x_{11} = 0\}$ となる。対称性より、結局

$\mathrm{supp}\, \mathcal{M}_\lambda \subset \{0\}$, $\mathrm{Ch}\, \mathcal{M}_\lambda \subset T^*_{\{0\}} V_{\mathbb{C}}$ を得る。(記号は [HK])。

Fourier 変換して $(\mathcal{M}_\lambda)^F = \mathcal{M}_{m-\lambda}$ だから、$\mathrm{Ch}\, \mathcal{M}_{m-\lambda} \subset T^*_{V_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$

故に $\lambda \notin \{0, 1, \cdots, m\}$ ならば $\mathrm{Ch}\, \mathcal{M}_\lambda \subset \{(0, 0)\}$ より $\mathcal{M}_\lambda = 0$。

また $\lambda = m$ のときも $\mathrm{Ch}\, \mathcal{M}_{m-\lambda} \subset T^*_{V_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$ より $\mathcal{M}_0$ は de Rham 系の直和。しかるに、開集合 $\{x \in V_{\mathbb{C}} ; \mathrm{rank}\, x = n\}$ 上の重複度 1 であるから、$I_0 = D(\partial)$。I_m はその Fourier 変換で出る。//

上の補題の (2) から、$[\mathfrak{f}] = \mathfrak{gl}(V)$ $(m < n)$ を得る。//

◎ $V = M(m, n ; \mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{gl}(m ; \mathbb{R}) + \mathfrak{gl}(n ; \mathbb{R})$

$\mathfrak{f}$ の作用は左右からの各々のかけざんからくるもの。

このとき $$[\mathfrak{f}] = \begin{cases} \mathfrak{f} & m = n \\ \mathfrak{gl}(V) & m \neq n \end{cases}$$

(∵) $m = n$ のとき、相対不変式 $\det x$ $(x \in V)$ をもつ。

$m \neq n$ のとき、左から従う。

◎ $V = M(m, n ; \mathbb{R})$ $\qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{sl}(m ; \mathbb{R}) + \mathfrak{sl}(n ; \mathbb{R})$

このとき $$[\mathfrak{f}] = \begin{cases} \mathfrak{f} & m = n \\ \mathfrak{sl}(V) & m \neq n \end{cases}$$

//

∵ $m=n$ のとき、絶対不変式 $\det x$ をもつ。
$m\neq n$ のとき、p7 のようにして示す。 //

他にもいくつか例はあるが、これでひととおりの方法はでてきたので、止める。
最後に、この問題は rank 1 の半単純対称空間の接空間の不変超函数の一性質に由来している。(cf. 木幡氏)。このことは集会「群の表現論と特殊関数」に書くつもりです。

[HK] Hotta, R. and M. Kashiwara, The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Invent. Math., 75 (1984) 327-358
[SKKO] Sato, M., M. Kashiwara, T. Kimura, and T. Oshima, Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, Invent. Math., 62 (1980) 117-179